

Monod-Kinetik

Peter Bützer

Inhalt

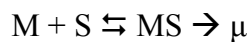
1	Einleitung	1
1.1	Modell	1
1.2	Modellannahmen	2
1.3	Gleichung	2
1.4	Drei Fälle	3
2	Simulation	3
2.1	Simulationsdiagramm (Typ 1)	3
2.2	Dokumentation (Gleichungen, Parameter)	3
2.3	Zeitdiagramm	4
2.4	Interpretation	4
3	Vergleich mit Messdaten	5
3.1	Experimentelle Daten	5
3.2	Vergleich der experimentellen Daten mit der Simulation	6
3.3	Interpretation	6

1 Einleitung

Die substratabhängige Wachstumsgeschwindigkeit von vorwiegend einzelligen Mikroorganismen wurde empirisch vom französischen Nobelpreisträger Jaques Lucien Monod (1910-1976)¹ 1949 mathematisch beschrieben, und ist auch heute noch Grundlage vieler Modelle.

1.1 Modell

Das Modell dargestellt als chemisches Reaktionsgleichungs-System:



[M]: Konzentration der Mikroorganismen (mol/l)

[S]: Substratkonzentration (mol/l)

[MS]: Von den Mikroorganismen aufgenommenes Substrat, als Konzentration: (mol/l)

K_m: Dissoziationskonstante (mol/l)

μ: Wachstumsgeschwindigkeit (mol/l/s)

↔ : Gleichgewicht

→ : Irreversible Reaktion

¹ Jacques Lucien Monod ein französischer Biochemiker. Berühmt wurde er vor allem durch sein Buch: Zufall und Notwendigkeit. Philosophische Fragen der modernen Biologie, München, Piper, 1971

1.2 Modellannahmen

1. Gleichgewicht: $Km = \frac{[M] \cdot [S]}{[MS]}$
2. Geschwindigkeit: $\mu = k_3 \cdot [MS]$; Je mehr Substrat an den Mikroorganismen gebunden ist, desto rascher wachsen sie.
3. Maximale Geschwindigkeit: $\mu_{\max} = k_3 \cdot [M_{\text{tot}}]$; alle vorhandenen Mikroorganismen wachsen gleichzeitig.
4. Massenbilanz: $[M_{\text{tot}}] = [M] + [MS]$

Aus diesen 4 Gleichungen erhält man durch geeignete Umformung die Gleichung von Monod²:

$$[M] = [M_{\text{tot}}] - [MS] = \frac{\mu_{\max}}{k_3} - \frac{\mu}{k_3} = \frac{\mu_{\max} - \mu}{k_3}$$

$$Km = \frac{[M] \cdot [S]}{\frac{\mu}{k_3}} = \frac{\frac{\mu_{\max} - \mu}{k_3} \cdot [S]}{\frac{\mu}{k_3}} = \frac{(\mu_{\max} - \mu) \cdot [S]}{\mu}$$

$$\mu \cdot Km = \mu_{\max} \cdot [S] - \mu \cdot [S]$$

$$\mu \cdot Km + \mu \cdot [S] = \mu_{\max} \cdot [S]$$

$$\mu \cdot (Km + [S]) = \mu_{\max} \cdot [S]$$

1.3 Gleichung

$$\mu = \mu_{\max} \cdot \frac{[S]}{Km + [S]}; \text{ Monod Kinetik}$$

μ : Wachstumsgeschwindigkeit der Mikroorganismen

μ_{\max} : Maximale Wachstumsgeschwindigkeit der Mikroorganismen

$[S]$: Substratkonzentration

Km : Monod-Konstante, sie verhält sich umgekehrt proportional zur Affinität des Organismus zum Substrat

Das μ ersetzen wir durch v , weil sich das griechische Zeichen im Simulationsprogramm nicht darstellen lässt.

$$v = \frac{dc}{dt} = v_{\max} \cdot \frac{[S]}{Km + [S]}$$

v : Wachstumsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t

v_{\max} : maximale Wachstumsgeschwindigkeit

² Kummert R., Stumm W., Gewässer als Ökosysteme, Verlag der Fachvereine Zürich, 1989,257

K_m : Monod-Konstante entspricht der Substratkonzentration bei halbmaximaler Wachstumsgeschwindigkeit (entspricht K_s bei der Michaelis-Menten-Gleichung)
 $[S]$: Substratkonzentration

Mit dieser kleinen Änderung ist die Monod-Gleichung zur Michaelis-Menten Gleichung für Enzyme analog.

1.4 Drei Fälle

Man kann drei Fälle unterscheiden:

1. $[S] \ll K_m$: $v \approx v_{\max} \cdot [S]/K_m = k \cdot [S]$; Die Wachstumsgeschwindigkeit ist ungefähr proportional der Substratkonzentration
2. $[S] \approx K_m$: Die Gleichung kann nicht vereinfacht werden
3. $[S] \gg K_m$: $v \approx v_{\max}$; Die Wachstumsgeschwindigkeit ist immer maximal (wie beim Alkoholabbau beim Menschen über 0.02 Promille)

2 Simulation

2.1 Simulationsdiagramm³ (Typ 1)⁴

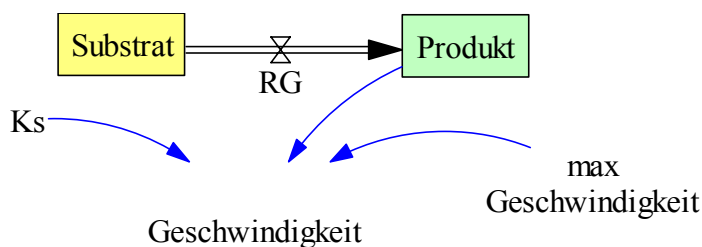


Abbildung 1: Simulationsdiagramm der Monod-Kinetik

2.2 Dokumentation (Gleichungen, Parameter)

- (01) FINAL TIME = 1000
 Units: Second
 The final time for the simulation.
- (02) Geschwindigkeit = $\max \text{ Geschwindigkeit} \cdot \text{Produkt} / (K_s + \text{Produkt})$
 Units: mmol/Second [0,?]
- (03) INITIAL TIME = 0
 Units: Second
 The initial time for the simulation.
- (04) $K_s = 100$
 Units: mmol [0,?]
- (05) max Geschwindigkeit = 11.5
 Units: mmol/Second [0,?]

³ Software: Programm Vensim[®] PLE, Ventana Systems, Inc.

⁴ Bützer Peter, Roth Markus, Die Zeit im Griff, Systemdynamik in Chemie und Biochemie, verlag pestalozzianum, Zürich 2006, S. 37ff

- (06) Produkt= INTEG (RG, 0)
Units: mmol [0,?]
- (07) RG= 1
Units: mmol/Second [0,?]
- (08) SAVEPER = TIME STEP
Units: Second [0,?]
The frequency with which output is stored.
- (09) Substrat= INTEG (-RG, 1000)
Units: mmol [0,?]
- (10) TIME STEP = 1
Units: Second [0,?]
The time step for the simulation.

2.3 Zeitdiagramm

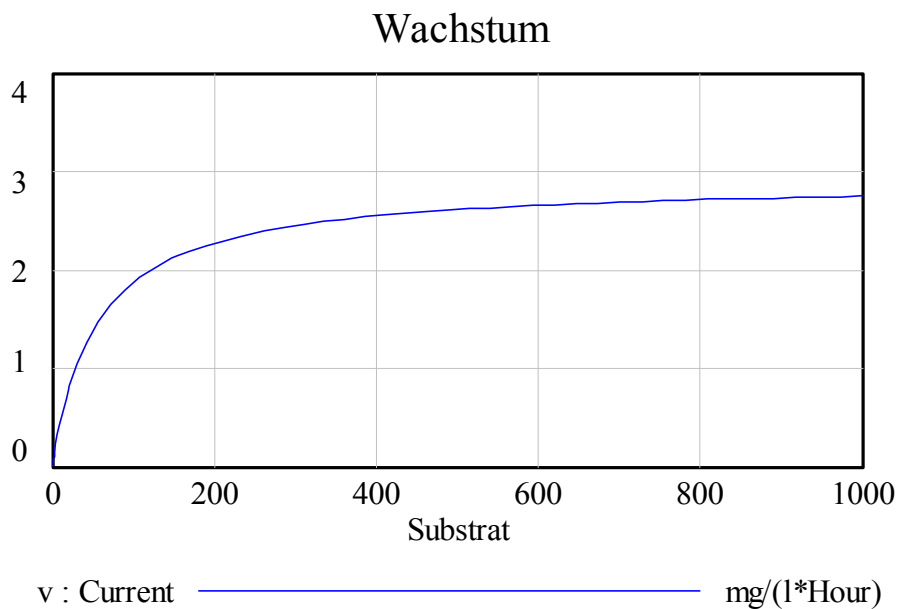


Abbildung 2: Zeitdiagramm des Wachstumsverlaufs

2.4 Interpretation

Die Simulation ist ausserordentlich einfach!

Die Gleichung ist eine allgemeine Beschreibung für den Substratabbau in einem System, in dem nur Populationsdichte und Substratkonzentration die Abbaukinetik bestimmen. Sie zeigt die lineare Abhängigkeit des Substratabbaues von der Populationsdichte der Mikroorganismen und die nichtlineare Abhängigkeit des Substratabbaues von der Substratkonzentration.

- Erster Teil der Kurve: $[S] \ll K_m$: $v \approx v_{\max} \cdot [S]/K_m = k \cdot [S]$; Die Wachstumsgeschwindigkeit ist ungefähr proportional der Substratkonzentration
- Gekrümmter Teil der Kurve: $[S] \approx K_m$: Die Gleichung kann nicht vereinfacht werden
- Letzter Teil der Kurve: $[S] \gg K_m$: $v \approx v_{\max}$; Die Wachstumsgeschwindigkeit ist immer maximal.

3 Vergleich mit Messdaten

3.1 Experimentelle Daten

Die Wachstumsgeschwindigkeit von aeroben Mikroorganismen mit kommunalem Klärschlamm wurde bei 23 ± 2 °C und verschiedenen Klärschlammkonzentrationen gemessen⁵.



Abbildung 3: Klärschlamm, das Substrat für die Mikroorganismen

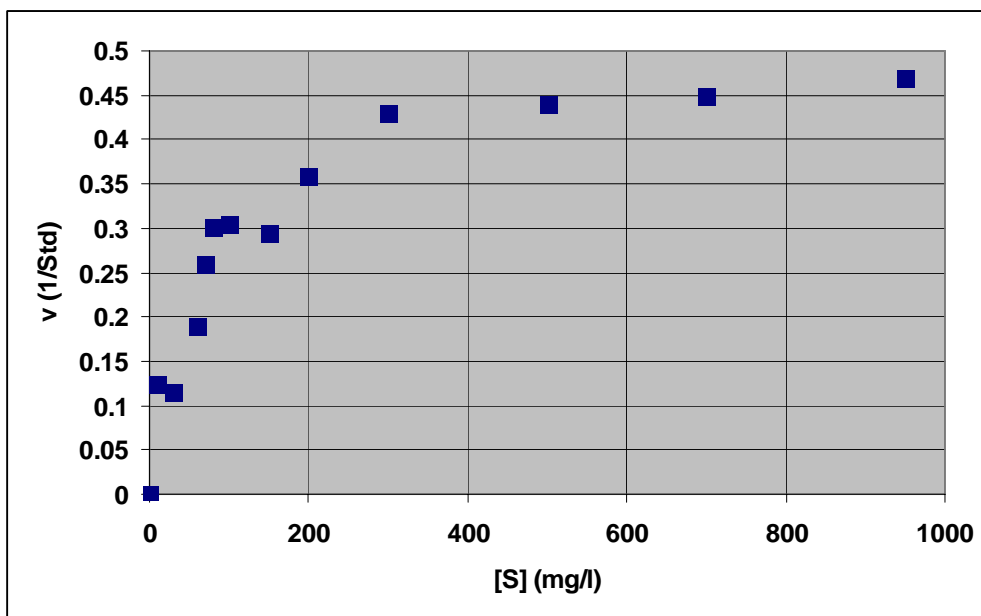


Abbildung 4: Abhängigkeit der Wachstumsgeschwindigkeit von Mikroorganismen in Klärschlamm von der Substratkonzentration

⁵ Peil K.M., Gaudy A.F., JR., Kinetic Constants for Aerobic Growth of Microbial Populations Selected with Various Single Compounds and with Municipal Wastes as Substrates, Applied Microbiology, Vol 21, No.2, Feb. 1971, p. 253-256

3.2 Vergleich der experimentellen Daten mit der Simulation

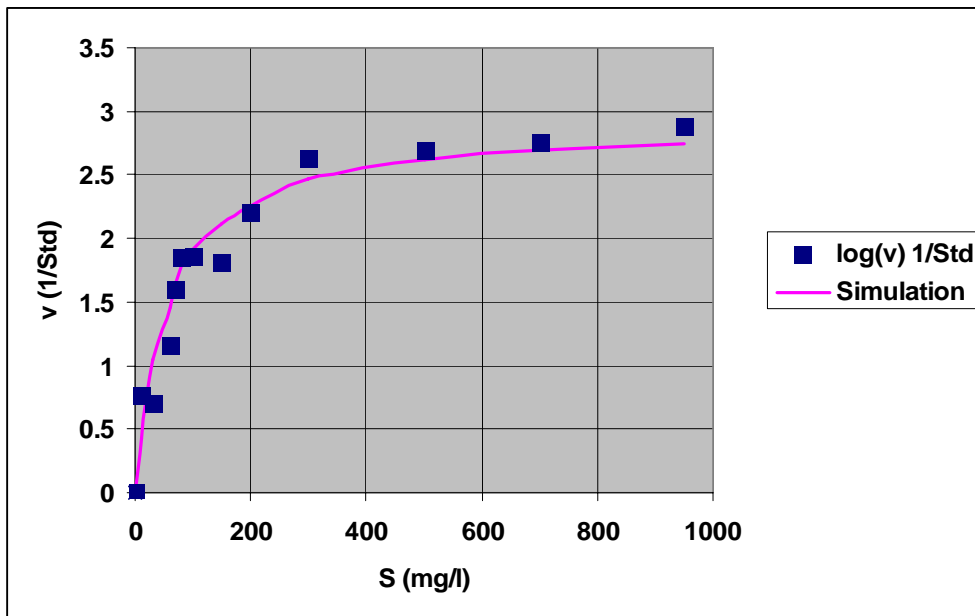


Abbildung 5: Vergleich von Messungen und Simulation

3.3 Interpretation

Die einfache Simulation kann das substratabhängige, aerobe Wachstum einer Vielzahl verschiedener Mikroorganismen in Klärschlamm, mit einem Gemisch von unterschiedlichsten Substraten von Klärschlamm sehr gut beschreiben.